

Varianta 71

Subiectul I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
- b) $a = 2$ și $b = -10$.
- c) $S_{ABC} = 6$.
- d) Mijlocul M al segmentului $(AB) \Rightarrow M(3, 5)$.
- e) $\operatorname{tg}^2 45^\circ = 1$.
- f) $\bar{z} = -3 + 4i$.

Subiectul II

1.

a) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{115}{144}$.

b) $f(f(2)) = 5$.

c) $p = \frac{1}{4}$.

d) $C_5^2 = 10$.

e) $x = 3$.

2.

a) $f(1) = -2$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3, x \in \mathbf{R}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

d) $x = \pm 1$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$.

Subiectul III

a) $\det A = -1$.

b) $A^2 = I_2$.

c) Deoarece $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$ se poate aplica binomul lui Newton.

$$(I_2 + A)^2 = I_2 + 2A \cdot I_2 + A^2 = 2(A + I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2007} = I_2 + A + I_2 + A + \dots + I_2 + A =$

$$= 1004(I_2 + A) = \begin{pmatrix} 1004 & 1004 \\ 1004 & 1004 \end{pmatrix}, \text{ deci } \det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2007}) = 0.$$

e) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$; $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow b = c \text{ și } a = d \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$

f) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$ sau $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow S = \{-i, i, -1, 1\}.$

g) $A^{2007} = A^{2006} \cdot A = (A^2)^{1003} \cdot A = I_2 \cdot A = A \Rightarrow$ suma elementelor matricei A^{2007} este 2.

Subiectul IV

a) $f(2^n) = n \ln 2.$

b) $f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n+1} = \ln 2.$

d) $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln x dx = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$

e) $x_n = f(1^2) + f(2^2) + \dots + f(n^2) = \ln 1^2 + \ln 2^2 + \dots + \ln n^2 =$
 $= 2 \ln 1 + 2 \ln 2 + \dots + 2 \ln n = 2 \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = 2 \ln n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ f)}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$

g) Numerele strict pozitive a, b, c formează o progresie geometrică $\Rightarrow b^2 = a \cdot c$ și
 logaritmând avem $\ln b^2 = \ln(a \cdot c) \Rightarrow 2 \ln b = \ln a + \ln c \Rightarrow \ln b = \frac{\ln a + \ln c}{2}$, adică
 numerele $\ln a = f(a), \ln b = f(b)$ și $\ln c = f(c)$ formează o progresie aritmetică.